УДК 519.175

**В. А. Баранский, С. В. Вихарев**

# О ХРОМАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ*

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер.

Пусть $G$ – произвольный $(n, m, k)$-граф, т. е. граф, имеющий $n$ вершин, $m$ ребер и $k$ компонент связности. Для натурального числа $x$ через $P(G, x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа $G$ в $x$ цветов. При этом не предполагается, что в раскраске графа должны участвовать все заданные $x$ цветов. Как хорошо известно (см., например, [1], [2] или [3]), функция $P(G, x)$ является многочленом степени $n$ от $x$ с нулевым свободным членом. Многочлен $P(G, x)$ называют *хроматическим многочленом* графа $G$ и записывают в виде

$$P(G, x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x.$$

Согласно теореме Уитни [4] (см. также [1] или [3]), коэффициенты хроматического многочлена удовлетворяют равенству

$$(-1)^i a_i = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j N(n-i, j),$$

где $N(n - i, j)$ есть число остовных подграфов графа $G$, имеющих $j$ ребер и $n - i$ компонент связности, т. е. число $(n, j, n - i)$-подграфов графа $G$.

Два графа называются *хроматически эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Пусть $C$ – некоторый класс графов и каждому графу из класса $C$ приписано некоторым образом число. Это число называется *хроматическим инвариантом* в классе $C$, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов из класса $C$. Если класс $C$ совпадает с классом всех графов, то говорят просто о хроматическом инварианте. Нетрудно выяснить, что хроматическими инвариантами являются число вершин, число ребер и число компонент связности графа (см. [3]). Конечно, хроматическое число графа также является его хроматическим

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы «Университеты России» (проект № 04.01.437) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-2227.2003.1).

© В. А. Баранский, С. В. Вихарев, 2005

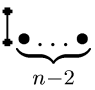
инвариантом. Поиск новых хроматических инвариантов играет важную роль в изучении хроматической эквивалентности графов и в нахождении графов, определяемых своим хроматическим многочленом с точностью до изоморфизма (см., например, [5–7]). Цель данной заметки состоит в нахождении новых хроматических инвариантов для класса двудольных графов. Они указаны в теореме 1.

Прежде чем перейти к двудольным графам, мы найдем некоторые хроматические инварианты в классе всех графов. По сути, мы найдем хроматические инварианты, указанные в [5]. При этом мы проиллюстрируем метод нахождения инвариантов, который будет использован далее, а также проделаем вычисления, которые окажутся полезными для дальнейшего.

Подсчитаем коэффициенты хроматического многочлена с помощью теоремы Уитни для $i = 0, 1, 2, 3$. Для этого вычислим число $(n, j, n-i)$-подграфов графа $G$ для всех допустимых значений $j$.

0) $i = 0$. Нужно рассмотреть лишь случай $j = 0$, и ясно, что $a_0 = N(n, 0) = 1$.

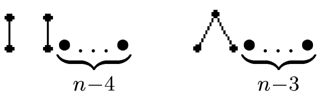
1) $i = 1$. Можно считать, что $j = 1$ и все $(n, 1, n-1)$-подграфы имеют вид




Поэтому $-a_1 = -N(n-1, 1) = -m$, т. е. число ребер $m = I_2$ является хроматическим инвариантом. Отметим, что через $I_1$ естественно обозначить хроматический инвариант, который совпадает с числом $n$ вершин графа.

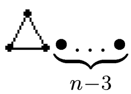
2) $i = 2$. В этом случае нужно рассматривать подграфы лишь при условии $j \geq 2$.

2.1) Для $j = 2$ все $(n, 2, n-2)$-подграфы графа $G$ получаются из подграфов случая 1 добавлением одного нового ребра, поэтому каждый из них может быть одного из следующих типов:




Поскольку число таких подграфов равно $\binom{m}{2}$, имеем $N(n-2, 2) = \binom{m}{2}$.

2.2) Для $j = 3$ все $(n, 3, n-2)$-подграфы графа $G$ можно получить из подграфов случая 2.1 добавлением одного нового ребра в компоненту связности. Поэтому все они имеют вид

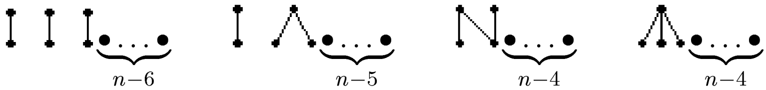


т. е. $N(n-2,3) =$  $(G)$, где  $(G)$ – число треугольников графа $G$.

Теперь ясно, что $a_2 = N(n-2,2) - N(n-2,3) = \binom{m}{2} -$  $(G)$. Отсюда следует, что число треугольников $I_3 =$  $(G)$ графа $G$ является хроматическим инвариантом и $a_2 = \binom{m}{2} - I_3$.

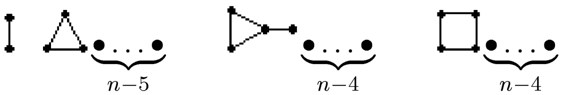
3) $i = 3$. Ясно, что нужно рассматривать подграфы для $j \geq 3$.

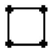
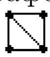
3.1) Для $j = 3$ все $(n, 3, n-3)$-подграфы графа $G$ получаются из подграфов случая 2.1 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из разных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих четырех типов:



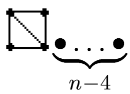

Следовательно, $N(n-3,3) = \binom{m}{3} -$ $(G)$ (мы учли подграфы из случая 2.2).

3.2) Для $j = 4$ все $(n, 4, n-3)$-подграфы графа $G$ получаются из подграфов случая 3.1 добавлением одного нового ребра в некоторую компоненту связности или из подграфов случая 2.2 добавлением одного ребра, соединяющего две вершины из разных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих трех типов:



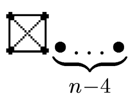

Следовательно, $N(n-3,4) =$ $(G)(m-3)+$ $(G)$, так как для каждого треугольника графа $G$ имеется $m-3$ подграфа первых двух типов. Здесь через $(G)$ мы обозначаем число подграфов вида  в графе $G$. Отметим, что ниже в аналогичном смысле используется обозначение $(G)$ и т. п.

3.3) Для $j = 5$ все $(n, 5, n-3)$-подграфы графа $G$ получаются из подграфов случая 3.2 добавлением нового ребра в некоторую компоненту связности. Поэтому все они имеют вид




Следовательно, $N(n-3,5) =$ $(G)$.

3.4) Для $j = 6$ аналогично все $(n, 6, n-3)$-подграфы графа $G$ имеют вид



т. е. $N(n-3,6) = \boxtimes(G)$.

Теперь ясно, что

$$-a_3 = -N(n-3,3) + N(n-3,4) - N(n-3,5) + N(n-3,6) =$$

$$= -\tbinom{m}{3} + \triangle(G) + \triangle(G)(m-3) + \square(G) - \boxbslash(G) + \boxtimes(G) =$$

$$= -\tbinom{m}{3} + \triangle(G)(m-2) + \square(G) - \boxbslash(G) + \boxtimes(G).$$

Отсюда получаем хроматический инвариант

$$I_4 = \square(G) - \boxbslash(G) + \boxtimes(G)$$

и $a_3 = \tbinom{m}{3} - I_3(m-2) - I_4$.

Найдем теперь для инварианта $I_4$ другой вид. Для этого будем перебирать все вершинно порожденные 4-подграфы $H$ графа $G$.

1) Если в $H$ нет 4-циклов, то $I_4(H) = 0$.

2) Пусть в $H$ имеется 4-цикл. Переберем возможные подслучаи.

2.1) Пусть $H$ – бесхордный 4-цикл $\square$. Тогда $I_4(H) = 1 - 0 + 0 = 1$.

2.2) Пусть $H$ – 4-цикл с одной хордой $\boxbslash$. Тогда $I_4(H) = 1 - 1 + 0 = 0$.

2.3) Пусть $H$ – полный 4-граф $\boxtimes$. Тогда число 4-циклов в нем равно $3!/2 = 3$, а число 4-циклов с одной хордой равно 6, так как для их получения из графа $H$ нужно отбрасывать по одному ребру. Поэтому $I_4(H) = 3-6+1 = -2$.

Таким образом,

$$I_4(G) = vg\square(G) - 2\boxtimes(G),$$

где через $vg\,\square\,(G)$ мы обозначаем число вершинно порожденных подграфов вида $\square$ графа $G$ .

Проделанную работу подытожим в следующем предложении.

**Предложение.** *Для произвольных графов следующие числа являются хроматическими инвариантами:*

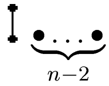
1) $I_3 = \triangle(G)$;

2) $I_4 = \square\,(G) - \boxbslash\,(G) + \boxbslash\,(G) = vg\,\square\,(G)\ -2\,\boxtimes\,(G)$.

Перейдем теперь к нахождению некоторых хроматических инвариантов двудольных графов. Как и в предыдущих вычислениях, будем подсчитывать число $(n, j, n-i)$-подграфов двудольного графа $G$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Случаи $i = 0, 1, 2, 3$ рассмотрены нами для произвольных графов, поэтому мы укажем здесь лишь вид подграфов двудольных графов в этих случаях. Отметим, что ситуация здесь упростится, поскольку в двудольных графах отсутствуют циклы нечетной длины и, в частности, треугольники.

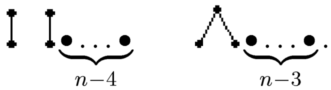
0) $i = 0$, $j = 0$, $a_0 = N(n, 0) = 1$.

1) $i = 1$, $j = 1$, $(n, 1, n-1)$-подграфы имеют вид




и $a_1 = N(n-1, 1) = m$.

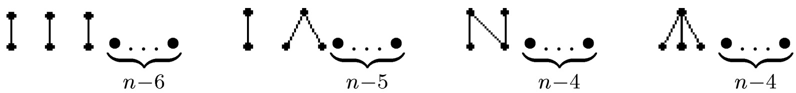
2) $i = 2$, $j = 2$, $(n, 2, n-2)$-подграфы могут быть одного из следующих двух типов:




Поэтому $a_2 = N(n-2, 2) = \binom{m}{2}$.

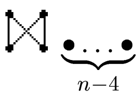
3) $i = 3$.

3.1) Для $j = 3$ каждый $(n, 3, n-3)$-подграф двудольного графа $G$ может быть одного из следующих четырех типов:




поэтому $N(n-3, 3) = \binom{m}{3}$.

3.2) Для $j = 4$ каждый $(n, 4, n-3)$-подграф имеет вид

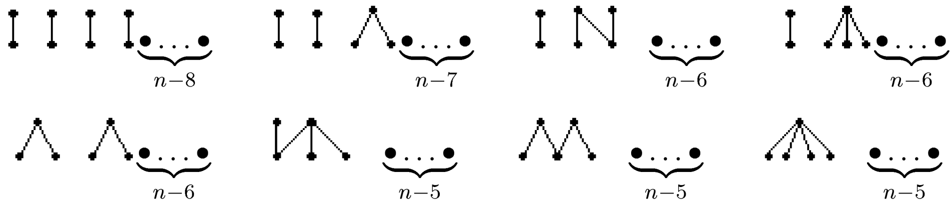



т. е. $N(n-3, 4) = K_{2,2}(G)$. Конечно, графы $K_{2,2}$ – это циклы длины 4.

Отметим, что случаи 3.3 и 3.4 для двудольных графов возникнуть не могут, поскольку в таких графах нет треугольников. Таким образом, $-a_3 = -\binom{m}{3} + K_{2,2}(G)$, т. е. $a_3 = \binom{m}{3} - K_{2,2}(G)$. Следовательно, число 4-циклов $K_{2,2}(G)$ является хроматическим инвариантом для двудольных графов. Ясно, что указанный нами ранее инвариант $I_4$ в случае двудольных графов совпадает с $K_{2,2}(G)$.

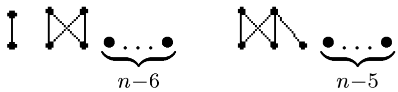
4) Рассмотрим теперь случай $i = 4$. Ясно, что нужно рассматривать подграфы при $j \geq 4$.

4.1) Для $j = 4$ все $(n, 4, n-4)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 3.1 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из разных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих восьми типов:



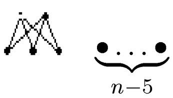

Всего имеется $\binom{m}{4} - K_{2,2}(G)$ таких подграфов, если учесть подграфы случая 3.2. Таким образом, $N(n-4, 4) = \binom{m}{4} - K_{2,2}(G)$.

4.2) Для $j = 5$ все $(n, 5, n-4)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 4.1 добавлением одного нового ребра в некоторую компоненту связности или из подграфов случая 3.2 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из разных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих двух типов:




Поскольку для каждого подграфа вида $K_{2,2}$ число таких подграфов равно $m - 4$, мы получаем $N(n-4, 5) = K_{2,2}(G)(m-4)$.

4.3) Для $j = 6$ все $(n, 6, n-4)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 4.2 добавлением одного нового ребра в некоторую компоненту связности. Поэтому они имеют вид




т. е. $N(n-4, 6) = K_{2,3}(G)$.

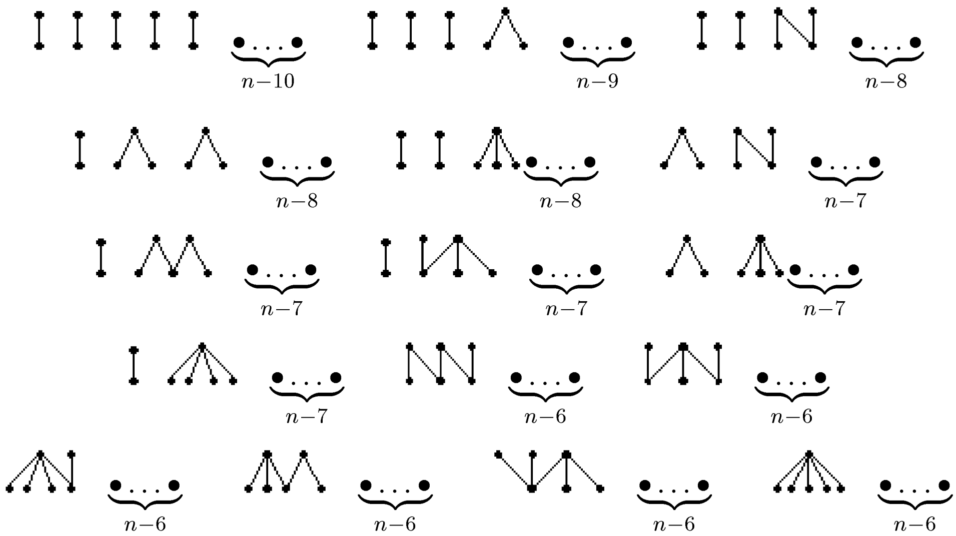
Теперь ясно, что

$$a_4 = N(n-4, 4) - N(n-4, 5) + N(n-4, 6) =$$
$$= \binom{m}{4} - K_{2,2}(G) - K_{2,2}(G)(m-4) + K_{2,3}(G) = \binom{m}{4} - K_{2,2}(G)(m-3) + K_{2,3}(G).$$

Следовательно, число $I_5 = K_{2,3}(G)$ подграфов типа $K_{2,3}$ в двудольном графе $G$ является хроматическим инвариантом в классе двудольных графов.

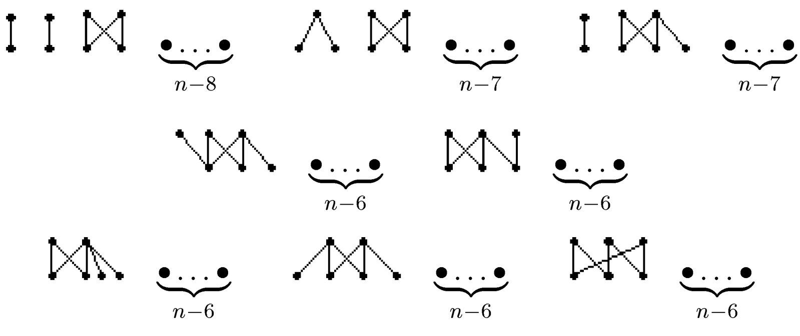
5) $i = 5$. Ясно, что нужно рассматривать подграфы при $j \geq 5$.

5.1) Для $j = 5$ все $(n, 5, n-5)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 4.1 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из разных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих 16 типов:




Всего имеется $\binom{m}{5} - K_{2,2}(G)(m-4)$ таких подграфов, если учесть подграфы случая 4.2. Таким образом, $N(n-5, 5) = \binom{m}{5} - K_{2,2}(G)(m-4)$.

5.2) Для $j = 6$ все $(n, 6, n-5)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 5.1 добавлением нового ребра в некоторую компоненту связности или из подграфов случая 4.2 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из различных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих 8 типов:

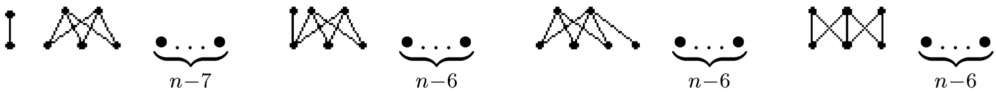


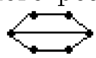

Заметим, что последний из графов – это 6-цикл, который мы будем обозначать через $C_6$, с добавленными изолированными вершинами. Первые семь графов и граф $K_{2,3}$ получаются из $K_{2,2}$ добавлением двух ребер всевозможными способами и изолированных точек. Поэтому

$$N(n-5,6) = K_{2,2}(G)\binom{m-4}{2} - 3K_{2,3}(G) + C_6(G),$$

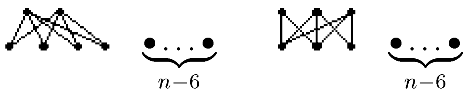
так как граф $K_{2,3}$ получается из трех 4-циклов присоединением двух смежных ребер к двум несмежным вершинам.

5.3) Для $j = 7$ все $(n, 7, n-5)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 5.2 добавлением одного нового ребра в некоторую компоненту связности или из подграфов случая 4.3 добавлением одного нового ребра, соединяющего две вершины из различных компонент связности. Поэтому они могут быть одного из следующих 4 типов:

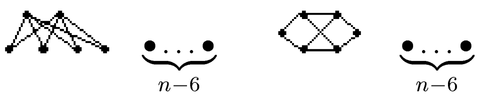



Отметим, что последний из указанных графов – это граф вида , т. е. 6-цикл с одной хордой и добавленными изолированными вершинами. Первые три графа получаются из $K_{2,3}$ добавлением одного ребра и изолированных вершин. Поэтому $N(n-5,7) = K_{2,3}(G)(m-6)+$  $(G)$.

5.4) Для $j = 8$ все $(n, 8, n-5)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 5.3 добавлением одного нового ребра в компоненту связности. Поэтому они имеют вид

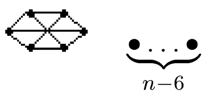



или, иначе, вид




Следовательно, $N(n-5,8) = K_{2,4}(G)+$  $(G)$.

5.5) Для $j = 9$ все $(n, 9, n-5)$-подграфы двудольного графа $G$ получаются из подграфов случая 5.4 добавлением одного нового ребра в компоненту связности. Поэтому они имеют вид



Следовательно, $N(n-5,9) =$  $(G) = K_{3,3}(G)$.

Теперь ясно, что

$$-a_5 = -N(n-5,5) + N(n-5,6) - N(n-5,7) + N(n-5,8) - N(n-5,9) =$$
$$= -\tbinom{m}{5} + K_{2,2}(G)(m-4) + K_{2,2}(G)\tbinom{m-4}{2} - 3K_{2,3}(G) + C_6(G) -$$

$- K_{2,3}(G)(m-6) -$  $(G) + K_{2,4}(G) +$  $(G) - K_{3,3}(G)$.

Следовательно, число

$I_6 = K_{2,4}(G) +$  $(G) -$  $(G) +$  $(G) -$  $(G)$

является хроматическим инвариантом в классе двудольных графов $G$.

Найдем теперь другой вид инварианта $I_6$, который вычисляется через подсчет вершинно порожденных подграфов. Для этого переберем в $G$ все вершинно порожденные 6-подграфы $H$.

Если в $H$ нет 6-цикла и $H$ не является подграфом типа $K_{2,4}$, то $I_6(H) = 0$. Если $H$ является подграфом типа $K_{2,4}$, то $I_6(H) = 1$.

Будем считать, что в $H$ имеется 6-цикл. Переберем возможные подслучаи.

Если $H$ – 6-цикл без хорд, то $I_6(H) = 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 1$.

Если $H$ – 6-цикл точно с одной хордой, то $I_6(H) = 0 + 1 - 1 + 0 - 0 = 0$.

Если $H$ – 6-цикл точно с двумя хордами, то $I_6(H) = 0 + 2 - 4 + 1 - 0 = -1$.

Если $H = K_{3,3}$, т. е. $H$ – 6-цикл точно с тремя хордами, то $I_6(H) = 0 + {}$ $+6 - 18 + 9 - 1 = -4$.

Таким образом, для двудольных графов $G$ выполняется равенство

$I_6 = K_{2,4}(G) + vgC_6(G) - vg$  $(G) - 4K_{3,3}(G)$.

Здесь в правой части равенства подсчитывается число вершинно порожденных подграфов для каждого из указанных типов графов.

Итог проделанной работы подведен в следующей теореме.

**Теорема.** *Следующие числа являются хроматическими инвариантами для двудольных графов:*

1) $I_4 = K_{2,2}(G) = C_4(G)$,

2) $I_5 = K_{2,3}(G)$,

3) $I_6 = K_{2,4}(G) +$  $(G) -$  $(G) +$  $(G) -$  $(G) =$

$= K_{2,4}(G) + vgC_6(G) - vg$  $(G) - 4K_{3,3}(G)$.

**Литература**


1. Read R. C. An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.

2. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.

3. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. Whitney H. A logical expansion in mathematics // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38. P. 572–579.

5. Farrell E. J. On chromatic coefficients // Discrete Math. 1980. Vol. 29. P. 257–264.

6. Koh K. M., Goh B. H. Two classes of chromatically unique graphs // Ibid. 1990. Vol. 82. P. 13–24.

7. Borowiecki M., Drgas-Burchardt E. Classes of chromatically unique or equivalent graphs // Ibid. 1993. Vol. 121. P. 11–18.


*Статья поступила 01.12.2004 г.*